

富勒烯、多面体和中国守门狮

Eugene A. Katz, 金必耀 / 文 刘 钝 / 译



本文的两位作者于 2014 年在特拉维夫举行的第二届“科学、技术与艺术的关系”国际会议上首次相会。卡茨 (Eugene A. Katz) 在他的报告“纳米、微观与宏观世界的类富勒烯构造”中显示了北京故宫的两幅守门狮子的图像, 指出狮爪下的球面呈现富勒烯多面体及其对偶多面体的图案。金必耀对此提出了一些质疑, 他们两人的讨论最终导致这篇合作文章的诞生, 使其成为一份数学旅游侦探的调查报告。

中国守门狮的雕像, 无论是石雕还是铜铸, 往往屹立在皇宫、皇陵、官府衙门、寺庙、政府官员或富户宅第的门前。这一传统可以追溯到汉代 (公元前 202- 公元 220 年)。狮子被认为具有强大的神秘保护力量。它们总是成对出现, 表示阴和阳: 雌性代表阴, 左前爪下有一幼崽, 象征生命的轮回; 雄性代表阳, 基本特征一致, 就是其右前爪下面按着一个绣球。有些绣球上镌刻着类似于富勒烯多面体或其对偶多面体的花纹¹。

作者之一卡茨首先从哈吉泰 (Istvan Hargittai) 的论文²获知, 在北京故宫乾清门前一只守门狮的前爪下, 有一个含有类似富勒烯花纹装饰的绣球。哈吉泰似乎是第一个注意到这一图案 (之数学意义) 的科学家。卡茨在首次访问北京期间, 专门找到这个绣球并拍摄了照片 (图 1a 和图 1c)。同时他意外地发现养心殿前一只雄狮爪下的绣球上也呈现富勒烯的对偶结构 (图 1b 和图 1d)。卡茨不假思索地认为这些守门狮铸成的时间与紫禁城建造完成的时间相同 (明初, 约 1420 年)。

¹ 富勒烯多面体是一种仅由五边形或六边形表面组成的多面体, 很容易证明一个富勒烯多面体无论有多少个六边形的表面, 其五边形表面只能是 12 个。欲了解更多有关富勒烯多面体及其对偶多面体, 请参阅本文的附录。

² Hargittai, I. Fullerene geometry under the lion's paw, *Mathematical Intelligencer*, Vol. 17, no.3, pp. 34-36, 1995.



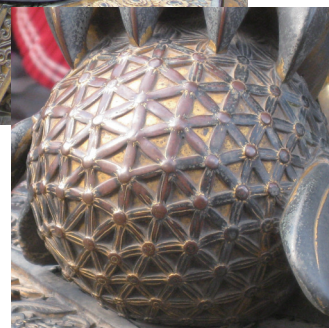
(a)



(c)



(b)



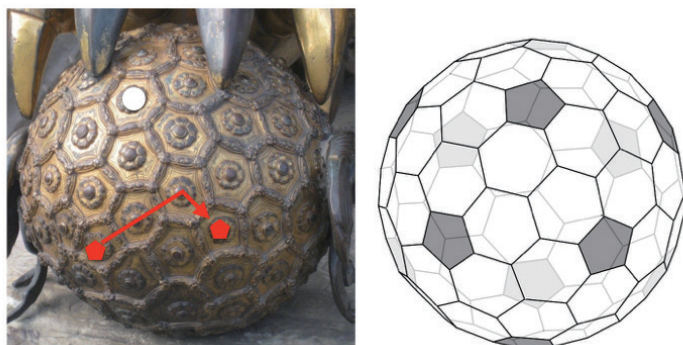
(d)

图 1. 北京故宫乾清门前的铜质镀金守门狮(a)及其脚下的绣球(c),以及养心殿前的镀金铜狮(b)及其脚下的绣球(d),分别呈现类似富勒烯与富勒烯对偶结构的图案。卡茨摄影

金必耀对这一时间表示质疑。(他认为)紫禁城主体建筑为木结构,其中许多曾毁于火灾又被重建,上述铜狮后面的宫殿就被重建过多次。尽管铜狮不会轻易毁于火灾,但对它们的断代还是应该根据历史记录。

金必耀将照片与在因特网上找到的图像(图2)加以比较,对有关富勒烯结构的认定也提出质疑:如果这一结构是二十面对称体的话,两个(相邻)五边形的中心(图中红色小五边形)都应该是一个正三角形的顶点,而该三角形的另一个顶点应该是第三个五边形的中心(图中白色圆形处)。然而,那里却是一个六边形(而非五边形)。

至于那个“富勒烯的对偶结构”(图1b、d),在三角形构成的图案正面出现了三个五边形(或三个五阶向量);参看图3的红色标识处(可见戈德堡向量(2,1)和(4,0),参阅本文附录)。



(a)

(b)

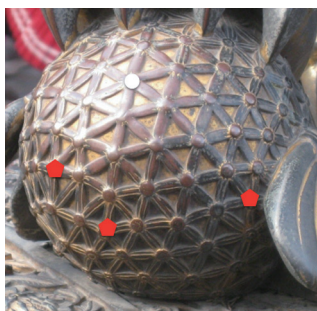
图2. 乾清门铜狮脚下绣球上的五边形(a), 带有戈德堡向量(2,1)的 C_{140} 富勒烯(b)

图3. 养心殿前“类富勒烯对偶”结构的分析：红色小五边形标示三角形构成的五边形之中心（或五阶顶点），白色圆形标示一个六阶顶点而不是五阶顶点

为此我们达成共识，这些结构不具有二十面体对称性。但是它们是否具有任何其他富勒烯或其对偶形态的结构呢？换句话说，他们是否具有12个五边形面（或12个凸五面角的顶点）？要回答这个问题，我们必须检查球体的整个表面。

通过对中国文献³的研究，金必耀得知紫禁城每座铜雕上面或其附近什么地方应有关于铸造时间的信息。他请求自己以前的博士后、现在北京工作的沈尧和艾清前往故宫去查看可能的信息，并从不同角度拍摄那些绣球。后来，他自己也来到故宫，仔细检查了乾清门、养心殿与宁寿宫前铜狮爪下绣球的“类富勒烯”球。

紫禁城始建于十五世纪早期，但是所有这些“类富勒烯”结构装饰的狮子绣球要晚出很多，也就是在乾隆皇帝前后的繁荣时期（约1740-1800年）。从不同角度观察乾清门前的狮子绣球，我们发现只有四个五边形面。尽管无法从

³ 根据郑军编著的《中国传统狮子艺术》（北京工艺美术出版社，2014），北京故宫共有六对青铜守门狮，分别位于太和门、乾清门、养性门、长春宫、宁寿门和养心殿门前。乾清门、宁寿门和养性门（原文为养心殿）前铜狮脚下的绣球是类富勒烯状的，而养心殿与长春宫前雄狮脚下的绣球具有三角形铺砖形态。

背面观看球体，在那一小块区域看来不可能存在八个五边形面。仔细观察球底部，铺砖图案变得相当不规则（图 4a）。此外，我们能够识别两个共边的三角形，以及一个与另外两个五边形共边的扭曲六边形。因此可以确信这不是一个富勒烯结构。

养心殿前那个狮子绣球上的三角形铺砖图案（图 1b 和图 1d），肯定也不具备富勒烯对偶结构，因为沈尧和艾清在上面发现了一些七阶向量（参看图 4b 蓝色标记）。

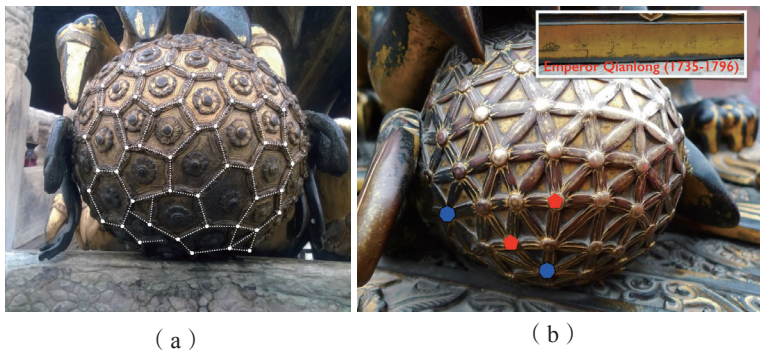


图 4. (a) “类富勒烯”结构的分子图示。(b) 蓝色七边形表示三角形铺砖构成的七阶顶点所在，沈尧、艾清摄影。

所谓“生命之花”，指的是众多均匀分布又相互交迭的圆形组成的平面铺砖图案，每个圆的中心都在 6 个相邻圆的交汇处（图 5a）。这种平面图形构成一个被称为“生命之种”的花形，它是这类铺砖图案的基本组成。“生命之种”包括 7 个被赋予六重对称的等圆（图 5b）。作为欧拉公式

$$F - V + E = 2$$

的一个简单结果，这种图案显然无法在球面上实现⁴。

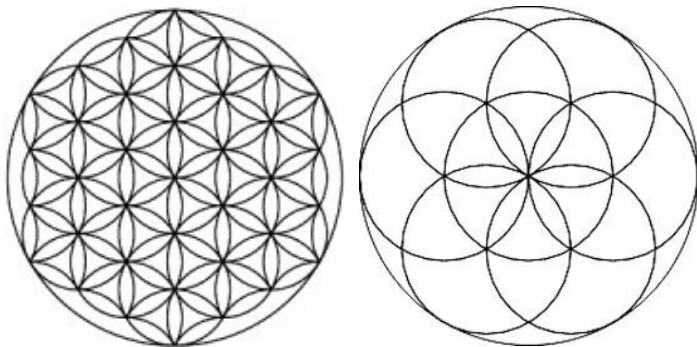


图 5 “生命之花” (a) 与 “生命之种” (b) 图案

⁴ 更精确的表述应该是：不存在一种完全由六边形表面围成的凸多面体。——译者注

“生命之花”的图案在世界许多文化和宗教中具有象征意义。例如，在犹太 - 基督教传统中，“生命之种”象征上帝创世纪的七天。这些图案的例子可以在古代埃及、腓尼基、亚述、印度、亚洲、中东地区的庙宇，以及中世纪的艺术作品中找到。图 6 是在以色列发现的刻有“生命之花”和“生命之种”的古代文物。



(a)

(b)

图 6. 以色列发现的带有“生命之花”和“生命之种”图案的古代器物：
(a) 希罗底 (Herodium) 希律宫的石材马赛克，公元前 1 世纪，现存耶路撒冷以色列国家博物馆；(b) 巴尼亚斯 (Banias) 阿古利巴宫的祭坛净手盆装饰，公元 1 世纪。卡茨摄影

在北京故宫的太和门前，沈尧与艾清发现了另一件具有“类生命之花”图案的狮子绣球（图 7）。这座铜狮铸像也制成于乾隆年间。球面上找不到任何五边（或角）形连接；显然，不知名的工匠没有按照适当的几何分析来制作它。



图 7. 太和门前铜狮脚下“类生命之花”结构的绣球，北京故宫。沈尧、艾清摄影

最后，我们注意到，有的科学文献已经提到这种含有“类富勒烯对偶”装饰的守门狮铸像⁵。那是一座位于北京颐和园正门东宫门前的铜狮。我们可以

⁵ T. Tarnai, Geodesic Dome under the Paw of an Oriental Lion. 见 <http://www.mi.sanu.ac.rs/vismath/visbook/tarnai/>.

在球面找到三个带有五瓣连接的顶点和几个关联 (2,1) 和 (3,2) 的戈德堡向量 (参阅本文附录)。排云殿前还有另一对铜狮, 其雄性狮子爪下的绣球也镌刻着“生命之花”图案, 但是没有五角形 (或五边形)。根据历史文献, 这两对铜狮铸像均制成于乾隆年间 (1736-1796)。不过, 排云殿前的那对狮子原先是放置在老夏宫圆明园正门前的⁶。

截顶二十面体 (truncated icosahedron) 是亚历山大里亚的帕普士 (Pappus of Alexandria, 290-350) 提到的 13 种阿基米德体之一, 也属于富勒烯家族。这种立体的图像最早见于卢卡·帕乔利 (Luca Pacioli, 1445-1517) 的《神圣比例》(*De Divina Proportione*, 1509)⁷, 书中的插图出自达·芬奇之手。然而, 帕乔利经常被人指责剽窃了其数学导师、伟大艺术家弗朗切斯卡 (Piero della Francesca, 约 1415-1492) 的手稿⁸, 后者现在被公认是在西方首先重新发现截顶二十面体与其他阿基米德体的人⁹。弗朗切斯卡写于 1480 年前后的手稿《关于五种正多面体的小册子》(*Libellus de Quinque Corporibus Regularibus*), 大概含有截顶多面体最古老的可信图像¹⁰。

无论如何, 我们可以得出这样的结论, 如同图 1 所示的“类富勒烯”球比弗朗切斯卡绘出的图形要晚出许多, 而且它们也缺乏数学的精确性。看起来制作它们的工匠从来没有构造起整个球体来。然而, 有些问题尚待科学史家与艺术史家解决并需要更深入的研究。两个最重要的问题是: (1) 创制这些漂亮的“类富勒烯”器物时是否进行了数学分析? 在相应的历史时期是否存在对这类艺术创作有关的多面体几何的科学考察? 这样的分析在中国最早有可能从什么时候开始进行? (2) 在中世纪中国的雕塑中是否可能存在一些更早的“类富勒烯”器物? 这类器物可能被创造出来的最早历史时期是何时?

我们知道第一个问题的答案: 如此复杂的多边形结构的数学分析, 只能在耶稣会教士利玛窦 (Matteo Ricci, 1552-1610) 及其追随者们在北京的朝廷里开展科学与宣传活动之后。他们将有关多面体的几何知识介绍到中国来。

⁶ 清朝直接从明朝继承了紫禁城。因为不需要建立一座新皇宫, 清代皇室的兴趣集中在皇家园林建设上面。在乾隆皇帝统治的清代高峰期, 北京地区建成了 90 多处皇家园林, 其中最著名的就是圆明园 (老夏宫) 和清漪园。在第二次鸦片战争中两所园林均遭英法联军焚毁。1884-1895 年的光绪年间, 清漪园被重建并命名为颐和园 (新夏宫)。圆明园中至少有两对铜狮, 清漪园则有一对。在第二次鸦片战争中, 圆明园的一对铜狮被英国军队掠走, 直到 100 多年后的 1984 年才归还中国, 现在被安置在北京钓鱼台国宾馆。圆明园的另一对铜狮则被安置在颐和园排云殿前。

⁷ L. Pacioli, *De Divine Proportione*, 1509 (Ambrosiana facsimile reproduction, 1956; Silvana facsimile reproduction, 1982).

⁸ K. Williams, Plagiarism in the Renaissance, *Mathematical Intelligencer*, Vol. 24, pp.45-57, 2002.

⁹ M. D. Davis, *Piero della Francesca's mathematical treatises*, Ravenna: Longo Editore (1977).

¹⁰ 一些带有类富勒烯甚至 C_{60} 形状的文物, 可早溯到希腊-罗马古典时代。例如, 詹森 (Jos Janssen) 在维也纳艺术史博物馆中, 发现了一个来自地中海东岸的罗马晚期水瓶, 其球状部分就装饰着如同 C_{60} 构造的众多正五边形与正六边形。参阅 J. W. A. M. Janssen, A soccer ball in the Kunsthistorisches Museum? *Forum Archaeologiae*, 64/IX/2012 (<http://farch.net>).

梅文鼎在清初被称为“历算第一名家”，在他的《几何补编》（1692）¹¹中对柏拉图体进行了彻底考察，试图对（明末来华耶稣会士）罗雅谷（Jacobus Rho, 1593-1638）等人编译的《测量全义》¹²中提供的简短介绍做一更全面的研究¹³。除了对五种正多面体的几何性质进行广泛考察之外，他也相当仔细地研究了两种阿基米德体，即由六个正方形面与八个正三角形面围成的“方灯”，和由12个正五边形面与20个正三角形面围成的“圆灯”（图8a, 8b）¹⁴。梅文鼎的书中还收入了其友人孔林宗补充的一段评论，其中介绍了另外四种阿基米德体，即截顶四面体、截顶立方体、截顶八面体、小斜方截半立方体，以及一个非凸的星状体¹⁵。值得指出，《几何补编》的插图只给出三十二面体¹⁶的一小部分（图8b）。它的完整的图形，特别是与正十二面体、或是与正二十面体相互重叠的模样，咋看像是一个五角化的正十二面体（图11），即 C_{60}^* 的对偶 C_{60}^* 。因此，很难判断梅文鼎是否了解 C_{60}^* 那样的几何结构。¹⁷

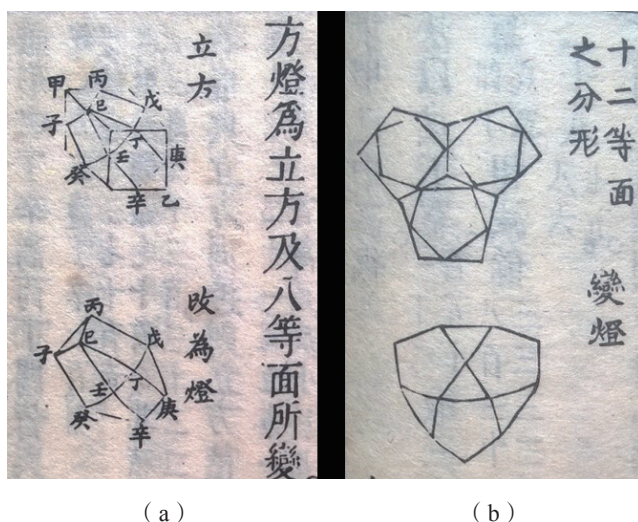


图8 梅文鼎《几何补编》中描绘的两种阿基米德体“方灯”（a）和“圆灯”（b）

¹¹ 梅文鼎，《几何补编》，《梅氏丛书辑要》，乾隆二十四年（1759）承学堂刻本。

¹² 罗雅谷，《测量全义》，《影印文渊阁四库全书本》，台北：商务印书馆。

¹³ Dun Liu, Platonic Solids and Archimedean Solids in the Late 17th Century China, in Ioannis Vandoulakis & Dénes Nagy eds., *Symmetry: Art and Science*, 2013/1-4, 216-220.

¹⁴ Dun Liu, Archimedes in China: Archimedes and His Works in Chinese Literature of the Ming and Qing Dynasties. in: Eberhard Knobloch, Hikosaburo Komatsu, Dun Liu, *Seki, Founder of Modern Mathematics in Japan*, Springer, 2013.

¹⁵ 前四种都是棱长相等的阿基米德体，可分别称为18等边半正多面体、36等边半正多面体、36等边半正多面体（又一种）、48等边半正多面体，最后一种为八角蒺藜体。参阅刘钝：“独孤信印与秦汉酒骰的几何学”，《数学文化》，9卷1期，62-69页，2018。

¹⁶ 即梅氏所谓之“圆灯”。——译者注

¹⁷ 本文译竣之后，作者之一金必耀利用他在北京大学客座期间考察了更多清代铜狮，并在某公园发现一个由12个五边形及若干六边形组成、对应于 C_{120} 同分异构物的绣球图案，细节他将另行著文披露。——译者补注

附录：富勒烯及其对偶结构

C_{60} 分子，也就是其原子均匀分布在一个截顶二十面体的 60 个顶点上的碳分子（与现代足球一样的阿基米德体，如图 9a），1985 年被人发现¹⁸，并被命名为富勒烯或巴基球，因为 C_{60} 分子的结构与美国建筑师富勒（Buckminster Fuller）的网格球顶设计相关。 C_{60} 的发现导致存在着一个完整富勒烯碳分子家族的假说，其中的碳原子排列在特定凸多边形的三度顶点上，而凸多边形的面仅由五边形和六边形组成¹⁹，这一猜想后来通过实验得以证实。（关于富勒烯结构），数学家通常给出自己的定义²⁰：一个 C_V 结构的富勒烯是具有 V 个三度顶点、其表面仅由五边形和六边形组成的（凸）多面体²¹。

对于任何具有 F 个表面、 E 条棱和 V 个顶点的凸多面体，下面的欧拉公式成立^{22, 23}：

$$F - V + E = 2 \quad [1]$$

很容易证明完全由六边形表面构成富勒烯是不可能的。如果分别以 f_6 、 f_5 表示富勒烯的六边形面数与五边形面数, 不难看出, $f_5 = 12$, $V = 2(10 + f_6)$ 。

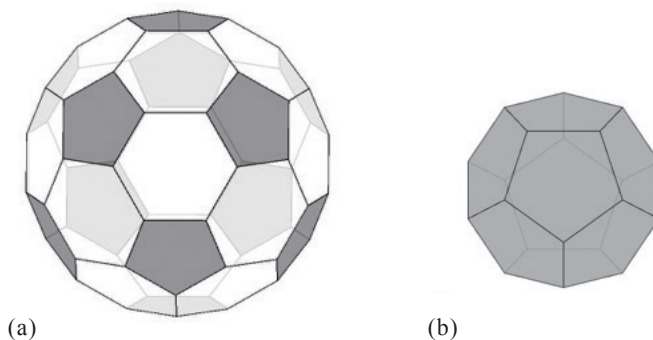


图 9. C_{60} (a) 和 C_{20} (b)

¹⁸ H. W. Kroto, J. R. Heath, S. C. O'Brien, R.F.Curl, R.E.Smalley, C₆₀: Buckminsterfullerene, *Nature*, Vol. 318, pp. 162-163, 1985.

¹⁹ A. D. J. Haymet, Footballene—A theoretical prediction for the stable, truncated icosahedral molecule C_{60} , *J. Am. Chem. Soc.*, Vol. 108, pp. 319–321, 1986.

²⁰ M. Deza, P. W. Fowler, A. Rassat, K. M. Rogers, Fullerenes as tilings of surfaces, *J. Chem. Inf. Comput. Sci.* 2000, 40, 550–558.

²¹ 甚至还有更一般的数学定义：富勒烯结构是一个可以覆盖任何表面（不限于球状面）、且仅有五边形和六边形面的有限三价地图（trivalent map）。

²² L. Euler, *Elementa Doctrinae Solidorum, Novi Commentarii Academiae Petropolitanae*, Vol. 4, pp. 109-140, 1758.

²³ L. Euler, Demonstratio Nonnullarum Insignium Proprietatum, Quibus Solida Hedris Planis Includa Sunt Praedita, *Novi Commentarii Academie Petropolitanae*, Vol. 4, pp. 140-160, 1758.

就是说, 五边形的个数总是 12, 六边形的个数可以是 0 或除了 1 之外的任何正整数。相应地, 最小的富勒烯是 C_{20} , 这是柏拉图体的一种即正十二面体 (图 9b), 以下依次为 C_{24} , C_{26} , C_{28} , $\dots$, $C_{2(10+h)}$ $\dots$

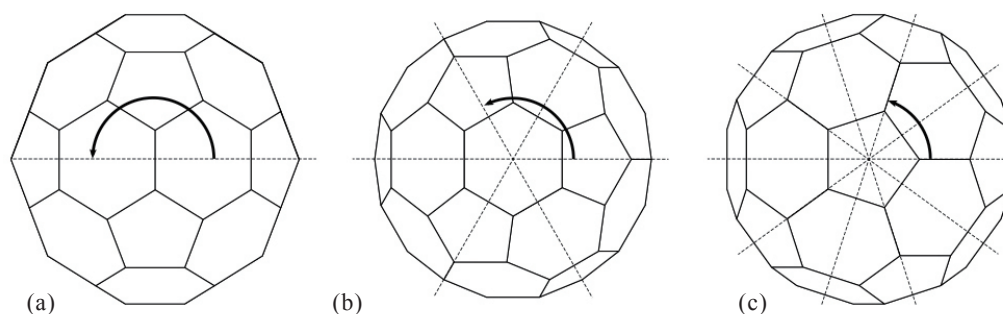


图 10, 截顶二十面体的旋转对称轴: 二重旋转轴 (a), 三重旋转轴 (b), (三) 五重旋转轴 (c)

表 1. 柏拉图多面体特征

多面体	每个面的边数 m	顶点关联棱数 n	面数 F	棱数 E	顶点数 V
正四面体	3	3	4	6	4
正六面体	4	3	6	12	8
正八面体	3	4	8	12	6
正二十面体	3	5	20	30	12
正十二面体	5	3	12	30	20

有些其他的富勒烯, 尽管不是全部, 既属于 I_h 群也属于另一种无对称中心的二十面体群 I 。在 C_{60} 被发现之前无人知道有这种对称分子存在。所有二十面体富勒烯的顶点 (即一个 C_v 分子中的碳原子数) 可以由非常简单的公式表达:

$$V = 20T \quad [2]$$

以及

$$T = a^2 + ab + b^2 \quad [3]$$

这里 a 和 b 为整数。

对于 I_h 对称群的富勒烯, $a = b \neq 0$ 或 $b = 0$ 。例如最小的富勒烯 C_{20} , 也就是柏拉图的正十二面体, 其特征值是 $(a, b) = (1, 0)$, $T = 1$; 对于 C_{60} , 即截顶二十面体, $(a, b) = (1, 1)$ 且 $T = 3$; 对于 C_{80} , $(a, b) = (2, 0)$ 且 $T = 4$ 。

二十面体富勒烯状的多面体通常被称为戈德堡多面体²⁴，被视为戈德堡向量坐标的参数 (a, b) 与其上两个距离最近的五边形相关。这类富勒烯族的形式定义以及上文包括公式 [2] 和 [3] 在内的分析，均来自美国数学家迈克尔·戈德堡 (Michael Goldberg) 1937 年发表的一篇创造性论文²⁵。这篇文章在病毒结构的开拓性研究过程中被一再引用。

在几何学中，一对相互关联的多面体称为对偶多面体，其中一个的顶点对应另一个的面。这种对应关系可以由五个柏拉图正多面体简要说明，它们中的四个两两对偶：正六面体与正八面体，正二十面体和正十二面体（参看表 1）。

从表 1 可以看出，正六面体面数与正八面体顶点数一样（都是 6），而正六面体的顶点数与正八面体的面数一样（都是 8）；同样，正二十面体的面数（20）和顶点数（12）恰好对应正十二面体的顶点数和面数。这两对多面体的参数 m （每个面的边数）和 n （每个顶点关联的棱数）也可以两两互换。换言之：正六面体与正八面体对偶，正二十面体与正十二面体对偶，正四面体自对偶。

一对对偶多面体的一个重要性质是它们具有相同的对称性和同样多的棱数。

一个等角的对偶多面体如果具有相同的顶点数那么它也是具有相同面数的等面对偶体。因为富勒烯多面体具有 12 个五边形和若干个六边形的面，顶点均为 3 阶，所以其对偶体仅有三角形的面，12 个五阶顶点与若干个六阶顶点。以下，我们用 C_V^* 表示 C_V 的对偶。

最小的富勒烯对偶是柏拉图正二十面体（正十二面体的对偶），它有 20 个三角形面和 12 个五阶顶点。截顶正二十面体 C_{60} 的对偶，是五角化正十二面体 C_{60}^* ，它有 60 个三角形面、12 个五阶顶点与 20 个六阶顶点（图 11）。

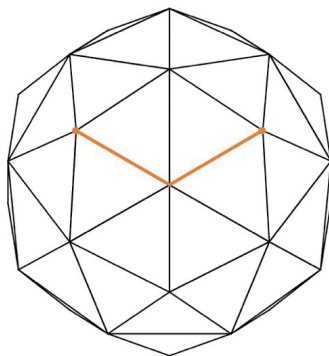


图 11. 截顶正二十面体 C_{60} 的对偶五角化正十二面体 C_{60}^*

由于每个富勒烯多面体及其对偶属于同一对称群，二十面体富勒烯的对偶也具有二十面体的对称性。唯一的区别在于公式 [2] 所描绘 C_{20T}^* 的面数，这

²⁴ G. Hart, Goldberg Polyhedra. in *Shaping Space: Exploring Polyhedra in Nature, Art, and the Geometrical Imagination*, M.Senechal, ed., Springer, 2013, pp.125-138.

²⁵ M.Goldberg, A class of multi-symmetric polyhedra, *Tôhoku Math.J.*, Vol.43, pp. 104-108, 1937.

里 T 仍然等于 $a^2 + ab + b^2$ 。而参数 a 和 b 分别表示联接两个最近五阶顶点的向量坐标 (图 12)。

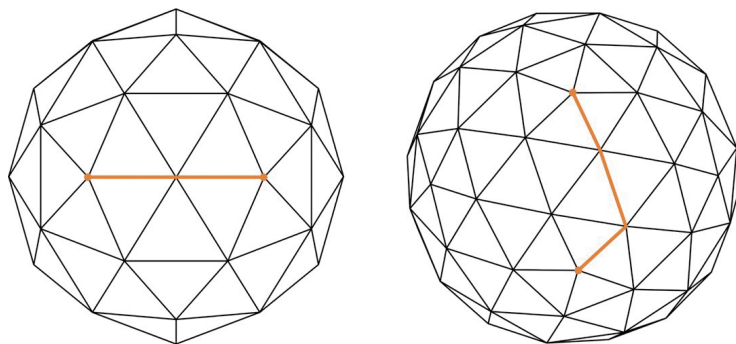


图 12. 二十面体富勒烯: (a) $C_{80}^* [Ih; (a, b) = (2, 0)]$; (b) $C_{140}^* [I; (a, b) = (2, 1)]$.

许多著名的网格球顶和大部分二十面体病毒都具有二十面体富勒烯对偶的结构²⁶。

²⁶ H. S. M. Coxeter, Virus Macromolecules and Geodesic Domes, in *A Spectrum of Mathematics*, J. C. Butcher, ed., Auckland, 1971

致谢:

作者感谢沈尧博士和艾清博士对这一考察工作的重要支持及他们提供的一些摄影图片, 同样感谢来自 Ioannis Vandoulakis、佐佐木力、刘钝、李国伟教授, 以及 Jos Janssen 博士卓有成效的讨论。金必耀向台湾国科会提供特别经费资助, 以及范原嘉提供富勒烯的有关图形致谢。

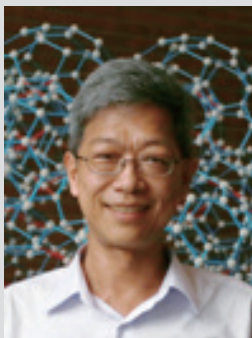
译自 Katz, E. & Bih-Yaw Jin, Fullerenes, Polyhedra, and Chinese Guardian Lions, *The Mathematical Intelligencer*, 38(2016):3, 61-68。作者授权译成中文并交《数学文化》刊载。



作者简介:

尤金·卡茨 (Eugene A. Katz), 以色列内格夫本古里安大学太阳能与环境物理系教授, 研究领域包括基于非传统半导体的光电板、太阳能电池的光电特性、纳米材料与太阳能的综合利用等, 出版物涉及科学史与纳米材料、有机体和建筑中的类富勒烯结构。

金必耀 (Bih-Yaw Jin), 台湾大学化学系与量子科学与工程中心教授, 研究领域包括单分子连接的电荷传输、非平凡石墨结构的拓扑分类、有机与石墨材料的电子过程, 以及科学与艺术的关系等。



译者简介:

刘钝, 清华大学科学史系特聘教授, 中国科技大学人文社会科学学院院长, 曾任中国科学院自然科学史研究所所长。